

Efficiënt testen

Een teek is een parasiet. Teken kunnen drager zijn van de bacterie waarvan je de ziekte van Lyme kunt krijgen. Ongeveer 20% van de teken in Nederland is drager van deze bacterie.

Om te onderzoeken of een persoon de ziekte van Lyme heeft, neemt men een monster: er wordt wat bloed afgenomen.

In een laboratorium wil men 1000 monsters testen op de aanwezigheid van de bacterie.

In het laboratorium kan elk van de monsters individueel getest worden. In dat geval zijn er 1000 tests nodig.

Een alternatief is om van een aantal monsters een paar druppels te nemen, die bij elkaar te voegen en dan dit mengsel te testen. Als het mengsel de bacterie niet bevat, dan bevat geen van de monsters in het mengsel de bacterie. Als het mengsel de bacterie wel bevat, weet je nog niet welk monster de bacterie bevat en moeten alsnog de monsters in het mengsel stuk voor stuk worden getest.

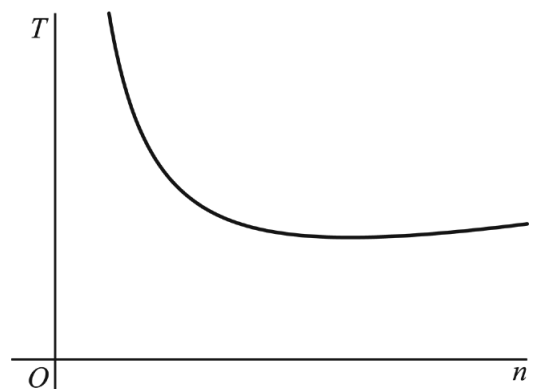
Het aantal monsters dat wordt samengevoegd voor één test is n . Als $n = 2$ worden dus telkens twee monsters samengevoegd voor een test, en als het mengsel de bacterie bevat, worden de twee monsters nog eens apart getest. Het totale aantal tests T dat naar verwachting nodig is, hangt af van n volgens de volgende formule:

$$T = 1000 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 0,8^n \right) \quad (\text{formule 1})$$

Hierbij is $n \geq 2$.

We bekijken nu eerst de grafiek van deze formule voor T . Deze grafiek is weergegeven in de figuur hiernaast. De grafiek heeft een laagste punt.

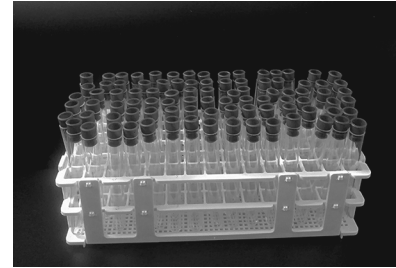
figuur



4p

- 6 Bepaal met behulp van de afgeleide van T de helling van de grafiek voor $n = 4$ en beredeneer daarmee of het laagste punt links of rechts van $n = 4$ ligt.

foto



Deze methode om het laagste totale aantal tests te bepalen wordt ook gebruikt bij het testen op andere soorten besmetting. De fractie besmette monsters wordt daarbij steeds voorgesteld door de variabele p (met $0 \leq p \leq 1$). Voor de eerder genoemde besmetting door teken geldt dat ongeveer 20% besmet is, dus wordt gerekend met $p = 0,2$.

Als er niet 1000, maar N monsters worden getest, dan ziet formule 1 er voor willekeurige p als volgt uit:

$$T(n) = N \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n \right) \quad (\text{formule 2})$$

Hierin is $T(n)$ het verwachte totale aantal tests, n het aantal monsters dat wordt samengevoegd en p de fractie besmette monsters.

In de praktijk werkt men in een laboratorium niet met de formule, maar met een tabel. Als bekend is welke fractie van de teken (p) besmet is, dan kan in zo'n tabel worden afgelezen voor welke waarde van n het verwachte totale aantal tests ($T(n)$) zo laag mogelijk is.

Om die laagste waarde te vinden wordt bepaald bij welke waarde van p geldt: $T(n) = T(n+1)$.

Er geldt dan het volgende verband:

$$n(n+1) \cdot p(1-p)^n = 1 \quad (\text{formule 3})$$

4p 7 Bewijs dat dit verband juist is.

Met behulp van formule 3 kunnen de grenswaarden voor p worden bepaald. Voor een aantal waarden van n staan de grenswaarden voor p weergegeven in de tabel hiernaast. In de tabel is bijvoorbeeld te zien dat voor waarden van p tussen 0,0411 en 0,0656 bij een keuze van $n = 5$ het totale aantal tests zo klein mogelijk is.

tabel

p	n
0,0656	4
0,0411	5
0,0283	6
0,0207	7
0,0158	8

Van een bepaalde besmetting is bekend dat $p = 0,025$. Men wil dat het verwachte totale aantal tests niet groter is dan 750. Met behulp van de tabel en formule 2 kan nu worden berekend van maximaal hoeveel monsters N bepaald kan worden of ze besmet zijn of niet.

3p 8 Bereken met behulp van de tabel en formule 2 van maximaal hoeveel monsters N bepaald kan worden of ze besmet zijn of niet.